# משפט

יהי טורים מתכנסים, ונניח שהטור מתכנס בהחלט. אזי הטור באשר מתכנס:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

## הערות

1. כבר ראינו שאם אף אחד מההטורים לא מתכנס בהחלט יתכן ש לא יתכנס: לדוגמה , במקרה זה
2. יתכן שבנסיבות של המשפט לא יתכנס בהחלט:

דוגמה: קח ו לכל , . ברור ש, מתכנס(לפי לייבניץ) אבל ,

## הוכחה

נסמן:

נשים לכן . כלומר:

ואז

ולכן חסומה, נגיד בנוסף לכך קיים כך שאם , יהיה קטן כרצוננו. כאשר

כיוון ש תנאי קושי מתקיים עבור הטור , ז"א קיים כך שאם אזי הסכום

עכשיו ניקח . טענה: אם אזי

גבולות של פונקציות

תהי ונניח שיש לנו פונקציה f המבלת ערכים ב המוגדרת בסביב נקודה של ז"א f מוגדרת בקבוצה

# הגדרה

נגיד ש שואפת לL כאשר x שואף ל ונכתוב אם לכל קיים כך שאם אזי

# משפט

תהי f מוגדרת ב. אזי אם ורק אם מתקיים התנאי הבא: לכל סדרה כך ש לכל n וכך ש,

## הוכחה

נניח ש. טענה: אם ו לכל n (ו מוגדרת לכל n) אזי   
יהי . קיים כך שאם אזי . כיוון ש קיים N כך שעבור . ז"א שעבור ז"א

עכשיו נניח ש. אזי קיים כך שלכל קיים כך ש וגם . נבחר באופן אינדוקטיבי סדרה כך ש: לכל וגם . ואז , לכל n, לכן

קח כך ש כך ש  
נגדיר . קיימת כך ש וכך ש  
אם כבר בחרנו ב כך ש, עבור , ו לכל

נשים ונבחר ב המקיים כך ש. ואז ,

# משפט

תהי f מוגדרת ב. אם לכל סדרה המוכלת ב כך ש ו לכל n בסדרה מתכנסת אזי קיים

## הוכחה

נוכיח שבנסיבות של המשפט, לכל סדרה כך ש לכל n וכך ש הגבול (שע"פ ההנחה קיים) חייב להתלכד עם כאשר מקיימת תנאי המשפט.

הינה תתסדרה של , הינה תתסדרה של

## מסקנה

אם קיימות שתי סדרות כך ש, ו אזי לא קיים

## דוגמה



נניח שf מוגדרת עבור . נגיד אם לכל K קיים כך שעבור ,

באופן דומה נגיד אם לכל K קיים כך שעבור ,

נניח שf מוגדרת עבור . נגיד ש אם לכל קיים כך שאם אז

נגיד ש אם לכל K קיים כך שאם אזי . נגיד ש אם לכל K קיים כך שאם אזי

תרגיל: להניח שf מוגדרת עבור ולהגדיר , ,